Università degli studi di Catania
Corso di Laurea in Farmacia.
Prova scritta del corso di Matematica con elementi di Statistica (A-L)

Docente: Giovanni Bramanti

Data: 22 Giugno 2018

Cognome e nome: Matricola: Codice corso:

Parte A Matematica di base

Esercizio 1

Un cubo di lato $3mm^3$ contiene $27mg$ di una soluzione acquosa, in un cubo analogo di lato $2mm^3$ sono allora contenuti quanti milligrammi di soluzione?

(A) $1mg$; **(B)** $18mg$; **(C)** $8mg$; **(D)** $2mg$; **(E)** nessuna delle opzioni precedenti, ritengo più indicato: .

Soluzione 1

un cubo di lato $3mm$ consiste di un volume di $3^3mm^3 = 27mm^3$ quindi ogni mm^3 contiene $1mg$ di soluzione. Del resto un cubo di lato $2mm$ ha volume $2^3mm^3 = 8mm^3$, quindi contiene $8mg$ di soluzione.

Esercizio 2

E' data la disequazione $\frac{(x+1)(x^2-1)}{x-1} \geq 0$ l'insieme risolutivo è:

(A) $x \in [-1, 1)$; **(B)** $x \in [0, 1)$; **(C)** $x \geq 0$; **(D)** $x \in (0, 1]$; **(E)** Altro:......

Soluzione 2

Posto che il campo di esistenza della frazione algebrica è $x \neq 1$ osserviamo che il numeratore può essere scomposto e la frazione semplificata come segue: $\frac{(x+1)(x^2-1)}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)(x+1)}{x-1} = (x+1)^2$ questo polinomio è sempre non negativo, ma ricordando che il punto $x = 1$ non è ammesso perché ivi la frazione algebrica risulta non definita possiamo concludere che l'insieme risolutivo della disequazione è $x \neq 1$

Parte B Teoria delle funzioni

Esercizio 3

Enuncia il teorema di Lagrange:

Data una funzione $f(x)$ continua in un intervallo $[a, b]$ e derivabile almeno in (a, b) esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Quindi discuti brevemente se le ipotesi del teorema sono verificate dalla funzione $f(x) = x^3 + 1$ nell'intervallo $[-1, y]$ per $y \geq 0$ ed in caso affermativo determina almeno un punto $x = \xi(y)$ in cui la derivata prima verifica la tesi:

Poiché la funzione è continua e derivabile in tutto l'asse reale in quanto tali sono tutte le funzioni polinomiali (per i teoremi sulla continuità della somma e del prodotto e per la continuità delle costanti e della funzione $f(x) = x$ e per gli analoghi teoremi di derivabilità) lo è a fortiori nell'intervallo indicato che dipende da y. Per trovare un punto che verifica la tesi scriviamo l'uguaglianza: $3c^2 = \frac{y^3+1-(-1^3+1)}{y+1}$ essendo $y > -1$ per definizione di intervallo, possiamo semplificare la frazione algebrica scomponendo il numeratore: troviamo due soluzioni dell'equazione $c = \pm\sqrt{\frac{y^2-y+1}{3}}$ Osserviamo che per $y > 1$ positivi risulta, per via della disuguaglianza triangolare: $y^2 - y + 1 < 3y^2$ quindi risulta $-1 < 0 < \sqrt{\frac{y^2-y+1}{3}} < y$: per $0 < y < 1$ risulta invece $|y^2 - y + 1| < 3$, da cui segue che $-1 < -\sqrt{\frac{y^2-y+1}{3}} < 0 < y$ infine per $-1 < y < 0$ risulta

$3y^2 < y^2 - y + 1 < 1$ quindi anche in questo caso avremo: $-1 < -\sqrt{\frac{y^2-y+1}{3}} < 0 < y$ il che prova l'appartenenza di almeno una delle due radici all'intervallo $(-1, y)$, come richiesto dal teorema di Lagrange. -

-

Esercizio 4

Se una funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo $[0, 1]$, inoltre è noto che $f(0) = -1 = -f(1)$ possiamo concludere con certezza che la funzione:

(A) ha la derivata che vale 2 in almeno un punto dell'intervallo $(0, 1)$; **(B)** ha due zeri nell'intervallo $(0, 1)$; **(C)** vale 1/2 in almeno un punto dell'intervallo $(0, 1)$; **(D)** ha derivata prima nulla in almeno un punto dell'intervallo $(0, 1)$; **(E)** nessuna delle opzioni precedenti, ritengo più indicato: .

Soluzione 4

entrambe le opzioni A e C sono accettabili nelle ipotesi date. L'opzione A discende dal teorema di Lagrange. L'opzione C discende dal teorma dei valori intermedi. Si può anche accettare la conclusione che la funzione ammette almeno uno zero nell'intervallo (per il teorema di esistenza degli zeri)...

N.B.

le risposte aperte di questa sezione sono valutate da 0 a 3 punti secondo la seguente griglia: 0 punti la risposta non è pertinente o non è espressa usando un linguaggio adeguato 1 punto: la risposta contiene alcuni elementi validi espressi in modo pressoché corretto; 2 punti: la risposta contiene quasi tutti gli elementi validi espressi in modo corretto; 3 punti: la risposta contiene tutti gli elementi validi espressi in modo corretto e con uso appropriato dei simboli matematici.

Parte C Applicazioni

Esercizio 5

Determina, la derivata della funzione $\frac{x^2-1}{x-1}$

(A) 1; **(B)** $-\frac{x^2+2x+1}{(x-1)^2}$; **(C)** $\frac{1}{(1-x)^2}$; **(D)** $\frac{-1+2x}{(x-1)^2}$; **(E)** Scrivi il tuo risultato se non equivalente a nessuno dei precedenti (vale 2 punti se il risultato è corretto ma già indicato, 3 punti se corretto ma non indicato)

Soluzione 5

notando che $\frac{x^2-1}{x-1} = x + 1$ per $x \neq 1$ abbiamo che la derivata vale 1.

Esercizio 6

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{cos^2(x)} dx =$:

(A) $\frac{\pi}{2}$; **(B)** $\frac{\pi}{4}\left(ln\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1\right) + 1$; **(C)** 0; **(D)** 1 ; **(E)** Altro:

Soluzione 6

una primitiva di $\frac{1}{cos^2(x)}$ è $tan(x)$ quindi l'integrale vale $tan(\pi/4) - tan(0)$=1.

Esercizio 7

La somma $2 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}$ vale

(A) 2^{12} **(B)** 1512; **(C)** 2^{11}; **(D)** $2^{12} - 1$; **(E)** Scrivi tu:

Soluzione 7

si può notare che i primi due termini della somma possono essere riscritti come $2 + 2 = 2^2$ ma ancora risulta: $2^2 + 2^2 = 2^3$ procedendo i questo passo possiamo concludere che la somma ammonta a 2^{11}

parte C facoltativa: Studio di funzione (bonus fino a 6 punti)

Studiare la funzione: $f(x) = x^2 + 1 + \frac{4}{x-1}$ individuando: A) il campo di esistenza; B) il segno; C) Le intersezioni con gli assi coordinati; D) gli asintoti; E) indicare gli intervalli in cui la funzione cresce e decresce ed eventuali massimi e minimi F) Il grafico probabile.
Criterio di valutazione: lo svolgimento dell'esercizio comporta l'attribuzione di un voto aggiuntivo da 0 a 6 calcolato secondo i seguenti pesi A)1 B)1 C)1 D) 1 E)1 F)1.

Traccia di soluzione

Segno: per lo studio del segno basta osservare che $x^2+1+\frac{4}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2+1)+4}{x-1} = \frac{x^3-x^2+x+3}{x-1}$ il numeratore ha uno zero intero che è $x=-1$ quindi dalla regola di Ruffini troviamo $f(x) = \frac{(x+1)(x^2-2x+3)}{x-1}$ poiché il trinomio ha discriminante negativo ha segno sempre positivo, quindi il segno della funzione è negativo in $(-1,1)$ e positivo fuori da questo intervallo eccetto che in $x=-1$ che è l'unico zero della funzione.
Intersezioni con gli assi: per quanto visto nello studio del segno le intersezioni con gli assi si riducono ai punti $(-1;0)$ (intersezione con l'asse x) e $(0;-3)$ (intersezione con l'asse y).
Asintoti: c'è un asintoto verticale di equazione $x=1$ nessun asintoto orizzontale e nessun asintoto obliquo.
Studio derivata prima. La derivata della funzione è $2x-\frac{4}{(x-1)^2} = 2\frac{x(x-1)^2-2}{(x-1)^2} = 2\frac{x^3-2x^2+x-2}{(x-1)^2} = 2\frac{(x-2)(x^2+1}{(x-1)^2}$ La funzione risulta allora crescente per $x>2$ e decrescente sia in $(-\infty,1)$ che in $(1,2)$
Massimi e minimi: c'è un minimo relativo in $(2;9)$
Studio derivata seconda: la derivata seconda della funzione è $2+\frac{8}{(x-1)^3}$ Quindi la funzione ha un flesso in $x=1-4^{(1/3)}$. La concavità è verso l'alto a sinistra di questo flesso e negativa ovunque a destra del flesso.
Grafico qualitativo: il grafico è qualitativamente ottenuto dalla sovrapposizione del grafico di una parabola con il grafico di un'iperbole equilatera riferita agli assi.

Statistica

Esercizio 1 5 punti

hai rilevato una serie di nove dati statistici, trovando i seguenti dati: 1g,2g,3g,4g,5g,6g,7g,8g,9g determina A) il valore medio.... B) il valore mediano... C) il valore più frequente ... D) l'unità di misura della varianza E) la varianza campionaria espressa come frazione. [suggerimento: metti inizialmente in ordine crescente i dati]

Soluzione

si vede, abbinando i termini dagli estremi verso l'interno che la somma si riduce a $4\cdot 10+5 = 9*5$ quindi la media è proprio il valore centrale che è anche la mediana. Non c'è moda. L'unità di misura della varianza è g^2, la varianza campionaria è $2*(4^2+3^2+2^2+1^2)/8g^2 = 15/2g^2$

Esercizio 2

Hai estratto a sorte due numeri da un'urna che contiene solo i numeri da 1 a 9 (l'estrazione avviene senza rimbussolamento), gli esiti dell'estrazione sono equiprobabili, determina la probabilità che il numero 4 sia strettamente maggiore del minimo e strettamente minore del massimo fra i due numeri che hai estratto.

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{2}$; **(C)** meno di $\frac{3}{4}$; **(D)** $\frac{5}{12}$; **(E)** Scrivi tu:

Soluzione

Le disposizioni compatibili con la richiesta sono $2*(3*5) = 30$ le disposizioni totali sono $9*8 = 72$ quindi abbiamo la probabilità data dal rapporto fra il numero di eventi compatibili con il numero di eventi possibili: $30/72 = 5/12$.

Esercizio 3

Nella stessa situazione precedente si chiede di determinare la probabilità che estraendo un terzo numero questo risulti compreso fra il minimo ed il massimo dei due numeri precedentemente estratti.

(A) 1 volta su 2; **(B)** 1 volta su 4; **(C)** 3 volte su 9; **(D)** 2 volte su 9; **(E)** Ho trovato piuttosto:

Soluzione

Abbiamo un totale di $2\cdot 8$ disposizioni senza spazio interposto (1,2) (2,1) (2,3) (3,2),... un totale di $2\cdot 7$ disposizioni con uno spazio interposto. Etc.. Quindi la probabilità richiesta può essere calcolata come segue: $(0/7\cdot 8+1/7\cdot 7+...+7\cdot 1)/(8+7+6+5+4+3+2+1) = ((1+2+..+7)+(1+2+...+6)+...1)/(7(8+7+6+...+2+1)) = (9*8*7/6)/(9*8*7/2) = 1/3$

Regolamento

Non è ammessa la detenzione né l'uso di telefoni, né di altri dispositivi elettronici, i quesiti a risposta multipla valgono 3 punti se la risposta scelta è corretta, -1 punti se la risposta scelta è errata, 0 punti se la domanda è lasciata in bianco. Le domande a risposta aperta contribuiscono secondo il punteggio specificato e non comportano penalità per il caso di risposta errata. Al voto totale contribuisce la media nelle sezioni A,B,C e Statistica espressa in trentesimi a cui si somma il voto attribuito dalla parte C facoltativa fino ad un massimo di 30. Si è ammessi all'orale con 18.